ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGUYỄN THỊ TRANG

TỌA ĐỘ TỶ CỰ VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG HÌNH HỌC PHẲNG

THÁI NGUYÊN, 10/2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

NGUYỄN THỊ TRANG

TỌA ĐỘ TỶ CỰ VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG HÌNH HỌC PHẲNG

CHUYÊN NGÀNH: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN

TS. NGUYỄN VĂN NGỌC

THÁI NGUYÊN, 10/2017

Mục lục

Danh sách hình vẽ **ii**

Mở đầu **1**

Chương 1. Các khái niệm cơ bản **3**

1.1 Khái niệm về tâm tỷ cự 3

1.1.1 Tọa độ tâm tỷ cự của hệ hai điểm 3

1.1.2 Tọa độ tâm tỷ cự của hệ ba điểm 5

1.1.3 Tọa độ tâm tỷ cự đối với hệ nhiều điểm 6

1.2 Ví dụ về tâm tỷ cự 7

Chương 2. Một số ứng dụng của tọa độ tỷ cự trong hình học phẳng **14**

2.1 Chứng minh các hệ thức hình học 14

2.2 Cực trị độ dài vectơ 25

2.3 Cực trị độ dài bình phương của vô hướng 30

2.4 Phương tích 34

2.4.1 Khái niệm 34

2.4.2 Một số bài tập vận dụng 35

2.5 Bất đẳng thức Klamkin và tọa độ tỷ tâm tỷ cự 49

2.5.1 Bất đẳng thức Klamkin 49

2.5.2 Các hệ quả của bất đẳng thức Klamkin 49

2.6 Bất đẳng thức Klamkin mở rộng 51

2.6.1 Khái niệm 51

2.6.2 Kết quả chính 52

2.6.3 Một vài ứng dụng 52

Kết luận **54**

Tài liệu tham khảo **55**

Danh sách hình vẽ

1.1 I là tâm tỷ cự của AB với bộ số (x, y) và (x', y'). 4
1.2 I là tâm tỷ cự của ABC ứng với bộ số (a, b, c). 8
1.3 H là tâm tỷ cự của ABC ứng với bộ số $(\tan A, \tan B, \tan C)$. 9
1.4 Điểm I nằm trong tam giác ABC. 12
1.5 $O(\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C)$ là tâm tỷ cự của ABC. 13

2.1 Điểm M cần tìm thỏa mãn $APMQ$ là hình bình hành 15
2.2 Điểm M cần tìm là trung trực của GI. 16
2.3 I là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABEI$. 17
2.4 Quỹ tích điểm M là đường tròn tâm I bán kính bằng $\frac{AB}{2}$. 19
2.5 Quỹ tích của M chính là đường trung trực của đoạn thẳng GF. . 19
2.6 Quỹ tích điểm M là đường trung trục của PQ. 20
2.7 $I(1, 3, -2)$ là tâm tỷ cự của ABC, $D(3, -2)$ là tâm tỷ cự của BC. . 21
2.8 $BCEI$ là hình bình hành. 21
2.9 A, I, D thẳng hàng. 22
2.10 Quỹ tích điểm M là đường tròn tâm I bán kính AJ. 23
2.11 Phương tích của P với $(O; R)$ là $\mathcal{P}_{P/(O)} = OP^2 - R^2$. 34
2.12 Phương tích của P với (O) là $\mathcal{P}_{P/(O)} = PT^2$. 35
2.13 Đường tròn chín điểm Euler (E) của ABC. 47

Mở đầu

Các bài toán hình học nói chung và hình học phẳng nói riêng là chuyên mục khó trong lĩnh vực toán phổ thông, nhưng lại có sức hấp dẫn kì lạ, bởi vì những bài toán này không những trực giác về hình học mà còn đòi hỏi nhiều tư duy sáng tạo.

Tọa độ tỷ cự trong hình học phẳng là đề tài lý thú, hấp dẫn nhiều chuyên gia toán học, thầy cô dạy toán trong các trường cấp trung học phổ thông và học sinh yêu toán. Tọa độ tâm tỷ cự thể hiện tọa độ của các điểm xác định nhờ một hình cơ sở thông qua các đại lượng vectơ. Nó là cầu nối, thể hiện mối quan hệ mật thiết giữa hình học và đại số. Nhờ có các công thức, các kết quả xây dựng từ trước mà những tính toán và biến đổi hình học thông thường đã được mô hình hóa thành một lớp các đại lượng và các quan hệ ràng buộc mang chất hình học giữa chúng.

Ngoài một số dạng bài toán được nêu ra là tìm tọa độ tâm tỷ cự thỏa mãn bộ số cho trước hoặc điều kiện nào đó, các bài tập về tâm tỷ cự liên quan đến nhiều dạng bài toán của hình học như dựa vào tâm tỷ cự chứng minh các hệ thức vectơ hình học, tìm cực trị độ dài vectơ, cực trị độ dài bình phương vô hướng, tính phương tích với đường tròn. Bài toán về ứng dụng tâm tỷ cự cũng xuất hiện nhiều trong bài toán khó trong đề thi học sinh giỏi, đề thi Olympic.

Các tài liệu về tọa độ tâm tỷ cự xuất hiện dưới nhiều tài liệu tổng hợp từ các chuyên gia quốc tế, như của Z. Abel [5], M. Schindler and E. Chan [7], và của V, Prasolov [6]. Ở trong nước, tạp trí Toán học Tuổi trẻ cũng dành các số để đăng vấn đề toán học liên quan về tâm tỷ cự trong hình học phẳng [1]. Qua đó, chúng ta có thể thấy sự thú vị và quan trọng của chủ đề này trong toán học đối với giáo viên dạy phổ thông và học sinh phổ thông yêu thích hình học. Tìm hiểu và học tập về tâm tỷ cự là cần thiết cho việc nâng cao kiến thức của giáo viên trong công việc giảng dạy và bồi dưỡng cho học sinh ở các trường THPT.

Với mong muốn cung cấp thêm một tài liệu tổng hợp kiến thức về tâm tỷ cự,

giúp cung cấp thêm một phương pháp hay và rất bổ ích để rèn luyện hình học phẳng, chúng tôi chọn chủ đề "**Tọa độ tỷ cự và một số ứng dụng hình học phẳng**" để làm đề tài luận văn cao học.

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn gồm 2 chương:

Chương 1. Các khái niệm cơ bản. Trong chương này, chúng tôi trình bày mệnh đề về sự tồn tại duy nhất, khái niệm, ví dụ về tọa độ tâm tỷ cự của hệ hai điểm, của hệ ba điểm, và hệ nhiều điểm. Sau đó chúng tôi trình bày một số ví dụ chi tiết tìm tâm tỷ cự của các hệ điểm cùng các bài toán liên quan tâm tỷ cự để hiểu rõ hơn và vận dụng khái niệm tâm tỷ cự cho các vấn đề ở Chương 2.

Chương 2. Một số ứng dụng của tọa độ tỷ cự trong hình học phẳng. Chương 2 trình bày nhiều bài toán ứng dụng của tọa độ tỷ cự trong hình học phẳng và hình không gian bao gồm các bài toán tìm tọa độ tâm tỷ cự thỏa mãn bộ số cho trước hoặc điều kiện nào đó, dựa vào tâm tỷ cự chứng minh các hệ thức vectơ hình học, tìm cực trị độ dài vectơ, tính phương tích với đường tròn, cuối cùng một số bài toán liên quan bất đẳng thức Klamkin.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên. Lời đầu tiên tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo TS. Nguyễn Văn Ngọc. Thầy đã dành nhiều thời gian hướng dẫn cũng như giải đáp các thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm luận văn. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy.

Tác giả xin chân thành cảm ơn toàn thể các thầy cô trong Khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình hướng dẫn, truyền đạt kiến thức trong suốt thời gian theo học, thực hiện và hoàn thành luận văn. Cảm ơn sự giúp đỡ của bạn bè, người thân và các đồng nghiệp trong thời gian làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2017

Người viết luận văn

Nguyễn Thị Trang

Chương 1

Các khái niệm cơ bản

Trong chương này, đầu tiên chúng tôi trình bày mệnh đề về sự tồn tại duy nhất, khái niệm, ví dụ về tọa độ tâm tỷ cự của hệ hai điểm, của hệ ba điểm, và hệ nhiều điểm. Sau đó chúng tôi trình bày nhiều ví dụ chi tiết tìm tâm tỷ cự của các hệ điểm cùng các bài toán liên quan tâm tỷ cự. Nội dung của Chương được tham khảo từ các tài liệu [1, 2, 3].

1.1 Khái niệm về tâm tỷ cự

1.1.1 Tọa độ tâm tỷ cự của hệ hai điểm

Mệnh đề 1.1.1 ([3]). *Cho hai điểm A, B và hai số thực x, y không đồng thời bằng 0. Khi đó, tồn tại duy nhất điểm I sao cho*

$$x\overrightarrow{IA} + y\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}. \tag{1.1}$$

Chứng minh. Vì $x\overrightarrow{IA} + y\overrightarrow{IB} = (x+y)\overrightarrow{IA} + y\overrightarrow{AB}$, nên:

1. Nếu $x + y = 0$ thì $x\overrightarrow{IA} + y\overrightarrow{IB} = y\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$ do $y = -x \neq 0$. Vậy không tồn tại I sao cho $x\overrightarrow{IA} + y\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.

2. Nếu $x + y \neq 0$ thì

$$x\overrightarrow{IA} + y\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \frac{-y}{x}\overrightarrow{IB} = \frac{-y}{x}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA}).$$

Khi đó, ta có

$$\overrightarrow{IA} = \frac{-y}{x}\overrightarrow{AB} - \frac{y}{x}\overrightarrow{IA} \text{ hay } \overrightarrow{IA} = \frac{-y}{x+y}\overrightarrow{AB}. \tag{1.2}$$

Vế phải của (1.2) là một vectơ hoàn toàn xác định, nên từ (1.2) suy ra tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn (1.1). Mệnh đề được chứng minh. □

Định nghĩa 1.1.2 ([3]). Các số x, y $(x + y \neq 0)$ được gọi là *tọa độ tỷ cự* của điểm I và viết $I(x, y)$ đối với hệ hai điểm A, B (đối với đoạn thẳng AB), nếu có hệ thức (1.1).

Nhận xét 1.1.3. Khi $x = y \neq 0$ thì hệ thức $x\overrightarrow{IA} + y\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ trở thành $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ hay I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Khi $x \neq 0$ còn $y = 0$ thì hệ thức $x\overrightarrow{IA} + y\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ trở thành $x\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow I \equiv A$.

Nhận xét 1.1.4. Nếu $I(x, y)$ là tâm tỷ cự của đoạn thẳng AB thì với mọi điểm M, ta có

$$x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} = (x + y)\overrightarrow{MI}. \tag{1.3}$$

Thật vậy,

$$x\overrightarrow{IA} + y\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow x(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MA}) + y(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{0}.$$

Từ đây dễ dàng suy ra hệ thức (1.3).

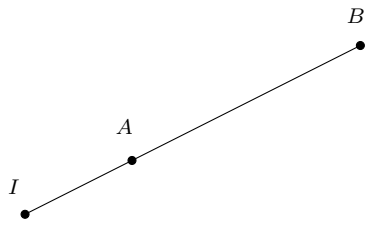
Nhận xét 1.1.5. Khái niệm tâm tỷ cự $I(x, y)$ được coi là mở rộng của khái niệm trung điểm của một đoạn thẳng AB vì $I(1, 1)$ chính là trung điểm của đoạn thẳng AB. Trong trường hợp này công thức (1.3) trở thành

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}. \tag{1.4}$$

là công thức trung điểm quen thuộc trong hình học.

Mệnh đề 1.1.6 ([3]). *Giả sử (x, y) và (x', y') là các tọa độ tỷ cự của cùng điểm I đối với đoạn thẳng AB. Khi đó,*

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}.$$



Hình 1.1: I là tâm tỷ cự của AB với bộ số (x, y) và (x', y').

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}
&x\overrightarrow{IA} + y\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}\\
&\Leftrightarrow -x\overrightarrow{AI} + y(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) = \overrightarrow{0}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{y}{x+y}\overrightarrow{AB}.
\end{aligned}$$

Như vậy I xác định duy nhất theo x, y. Giả sử $x'\overrightarrow{IA} + y'\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$. Tương tự, ta có $\overrightarrow{AI} = \dfrac{y'}{x'+y'}\overrightarrow{AB}$. Từ đây suy ra,

$$\frac{y}{y'} = \frac{x+y}{x'+y'}.$$

Từ đó

$$x'y + yy' = xy' + yy'$$

hay

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}.$$

□

1.1.2 Tọa độ tâm tỷ cự của hệ ba điểm

Mệnh đề 1.1.7 ([3]). *Cho ba điểm A, B, C và ba số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z \neq 0$. Khi đó, tồn tại duy nhất điểm $I = I(x, y, z)$ sao cho*

$$x\overrightarrow{IA} + y\overrightarrow{IB} + z\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}. \tag{1.5}$$

Chứng minh. Thật vậy,

$$x\overrightarrow{IA} + y\overrightarrow{IB} + z\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow x\overrightarrow{IA} + y(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA}) + z(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{0}.$$

Suy ra,

$$\overrightarrow{IA} = -\frac{y}{x+y+z}\overrightarrow{AB} - \frac{z}{x+y+z}\overrightarrow{AC}. \tag{1.6}$$

Vế phải của (1.6) là một vectơ hoàn toàn xác định, nên từ (1.6) suy ra tồn tại duy nhất điểm $I = I(x, y, z)$ thỏa mãn (1.6), tức là thỏa mãn yêu cầu mệnh đề. □

Định nghĩa 1.1.8 ([3]). Các số x, y, z $(x + y + z \neq 0)$ được gọi là tọa độ tỷ cự của điểm I và viết $I(x, y, z)$ đối với hệ ba điểm A, B, C (đối với tam giác ABC nếu A, B, C không thẳng hàng), nếu có hệ thức (1.5).

Nhận xét 1.1.9. Nếu $I(x, y, z)$ là tâm tỷ cự của hệ 3 điểm A, B, C thì với mọi điểm M, ta có

$$x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = (x + y + z)\overrightarrow{MI}. \tag{1.7}$$

Thật vậy,

$$x\overrightarrow{IA} + y\overrightarrow{IB} + z\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow x(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MA}) + y(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MB}) + z(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{0}.$$

Từ đây dễ dàng suy ra hệ thức (1.8).

Nhận xét 1.1.10. Khái niệm tâm tỷ cự $I(x, y, z)$ được coi là mở rộng của khái niệm trọng tâm của tam giác ABC vì $I(1, 1, 1)$ chính là trọng tâm G của tam giác ABC. Trong trường hợp này công thức (1.4) trở thành

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \tag{1.8}$$

là công thức trọng tâm quen thuộc đối với tam giác.

Mệnh đề 1.1.11 ([3]). *Giả sử (x, y, z) và (x', y', z') là các tọa độ tỷ cự của cùng điểm I đối với hệ ba điểm A, B, C. Khi đó,*

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}.$$

Chứng minh của mệnh đề này được tiến hành tương tự như đối với chứng minh của Mệnh đề 1.1.6 và dựa trên hệ thức (1.6).

1.1.3 Tọa độ tâm tỷ cự đối với hệ nhiều điểm

Mệnh đề 1.1.12 ([3]). *Cho n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và n số thực $k_1, k_2, \ldots, k_n$ thỏa mãn điều kiện $k_1 + k_2 + \ldots + k_n \neq 0$. Khi đó, tồn tại duy nhất một điểm $I(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, sao cho*

$$k_1\overrightarrow{IA_1} + k_2\overrightarrow{IA_2} + \ldots + k_n\overrightarrow{IA_n} = \overrightarrow{0}. \tag{1.9}$$

Chứng minh. Thật vậy,

$$k_1\overrightarrow{IA_1} + k_2\overrightarrow{IA_2} + \ldots + k_n\overrightarrow{IA_n} = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow k_1\overrightarrow{IA_1} + k_2(\overrightarrow{IA_1} + \overrightarrow{A_1A_2}) + \ldots + k_n(\overrightarrow{IA_1} + \overrightarrow{A_1A_n}) = \overrightarrow{0}.$$

Từ đây suy ra

$$\overrightarrow{IA_1} = -\sum_{i=2}^{n} \frac{k_i}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}\overrightarrow{A_1A_i}. \tag{1.10}$$

Hệ thức này cho thấy điểm I được xác định một cách duy nhất. □